Clasa a IX-a

Aplicații ale trigonometriei în geometrie

<u>Teorema cosinusului</u>

Prof. Carmen Mirela Alexa

Recapitularea cunoştinţelor

- Care este forma analitică a unui vector de poziție?
- Care este lungimea lui?
- Cum se exprimă analitic un vector dat de două puncte oarecare din plan?
- Care este lungimea lui?
- Care este definiția produsului scalar a 2 vectori?
- Cum se scrie analitic produsul scalar?
- Cum se exprimă cosinusul unghiului a doi vectori?
- Care este condiția de ortogonalitate a doi vectori?

Problema 1

Să se determine unghiul vectorilor:

a) $\vec{u}=2\vec{i}+\vec{j}$, $\vec{v}=-4\vec{i}-2\vec{j}$;

b) $\vec{u}=-2\vec{i}+\vec{j}$, $\vec{v}=\vec{i}+2\vec{j}$.

Rezolvare problema 1

a) $$\vec{u}\cdot\vec{v}=\left|\vec{u}\right|\cdot\left|\vec{v}\right|\cdot\cos\varphi = \sqrt{4+1}\cdot\sqrt{16+4}\cdot\cos\varphi=10\cos\varphi$$

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=a_1a_2+b_1b_2=2(-4)+1(-2)=-10.$$

Atunci

$$-10\cos\varphi=10\Rightarrow\cos\varphi=-1$$

Cum $\varphi\in\left[0,\pi\right]\ \Rightarrow\varphi=\pi$

b) $$\vec{u}\cdot\vec{v}=\left|\vec{u}\right|\cdot\left|\vec{v}\right|\cdot\cos\varphi=\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}\cdot\cos\varphi\ =1(-2)+1\cdot 2$$

$$\Rightarrow\cos\varphi=0$$

Cum $\varphi\in\left[0,\pi\right]\Rightarrow\ \varphi=\dfrac{\pi}{2}.$

Problema 2

Să se determine parametrul real m ştiind că triunghiul ABC este dreptunghic în Â, iar $A(m-1,-6)$, $B(2,-1-m)$, $C(-12,0)$.

Rezolvare problema 2

$$\Delta ABC \text{ dreptunghic} \Leftrightarrow AB \perp AC \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$$

$$\overrightarrow{AB}=\left(3-m,-m+5\right),\ \overrightarrow{AC}=\left(-11-m,6\right).$$

$$\text{Atunci } \left(3-m\right)\cdot\left(-11-m\right)+6\left(-m+5\right)=0$$

$$\Leftrightarrow m^2+2m-3=0 \Leftrightarrow m_1=1,\ m_2=3.$$

Teorema cosinusului

Teoremă: Fie ABC un triunghi cu AB = c, $AC = b$, $AC = a$. Atunci au loc egalitățile:

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A;$$

$$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B;$$

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C.$$

Demonstrație

Rescriem prima relație:

$$BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2AC \cdot AB \cdot \cos A$$

Calculez membrul drept:

$$AC^2 + AB^2 - 2AC \cdot AB \cdot \cos A =$$

$$= \left|\overrightarrow{AC}\right|^2 + \left|\overrightarrow{AB}\right|^2 - 2\left|\overrightarrow{AC}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \cos A =$$

$$= \left|\overrightarrow{AC}\right|^2 + \left|\overrightarrow{AB}\right|^2 - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} =$$

$$= \overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{AB}^2 - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right)^2 =$$

$$= \left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA}\right)^2 = \overrightarrow{BC}^2 = \left|\overrightarrow{BC}\right|^2 = BC^2.$$

c.c.t.d.

Observația 1

Dacă $\hat{A}=90^{\circ} \Rightarrow \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow BC^2=AC^2+AB^2 \Leftrightarrow a^2=b^2+c^2,$$

atunci vom întâlni chiar teorema lui Pitagora.

De aceea, teorema cosinusului este o generalizare a teoremei lui Pitagora valabilă pentru orice triunghi.

Observația 2

Din teorema cosinusului se pot determina măsurile unghiurilor triunghiului, în funcție de laturile acestuia:

$$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc};$$

$$\cos B = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac};$$

$$\cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}.$$

Problema 3

Fie ΔABC. Să se arate că:

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=\frac{1}{2}\left(a^2+b^2+c^2\right).$$

Rezolvare problema 3

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=$$

$$=\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|\cdot\cos A+\left|\overrightarrow{BA}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BC}\right|\cdot\cos B+\left|\overrightarrow{CA}\right|\cdot\left|\overrightarrow{CB}\right|\cdot\cos C$$

$$=c\cdot b\cdot\cos A+c\cdot a\cdot\cos B+a\cdot b\cdot\cos C=$$

$$=\frac{1}{2}\left(b^2+c^2-a^2\right)+\frac{1}{2}\left(a^2+c^2-b^2\right)+\frac{1}{2}\left(a^2+b^2-c^2\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(a^2+b^2+c^2\right).$$

c.c.t.d

Problema 4

Un triunghi ABC are laturile $a = 10$, $b = 5$, $c=\sqrt{50}$.

a) Să se determine cosinusul unghiurilor triunghiului.

b) Să se calculeze $\cos(B + C)$.

Rezolvare problema 4

$$\text{a) } \cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{25+50-100}{2\cdot 5\cdot\sqrt{50}} = \frac{-25}{10\cdot\sqrt{50}} =$$

$$\cos A = -\frac{5\sqrt{50}}{100} = -\frac{5\sqrt{2}}{20} = -\frac{\sqrt{2}}{4}.$$

$$\text{Analog } \cos B = \frac{100+50-25}{2\cdot 10\cdot\sqrt{50}} = \frac{25}{20\cdot\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{4}.$$

$$\cos C = \frac{100+25-50}{2\cdot 10\cdot 5} = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}.$$

$$\text{b) } \quad \cos\left(B+C\right) = \cos\left(\pi - A\right) = -\cos A = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Tema de casă

- Din manualul de Niță, Năstăsescu,…, de la paginile 237 – 238 se va conspecta teorema cosinusului.

- Din culegerea de Burtea se vor rezolva de la pagina 233 exercițiile 2,3,4,5.