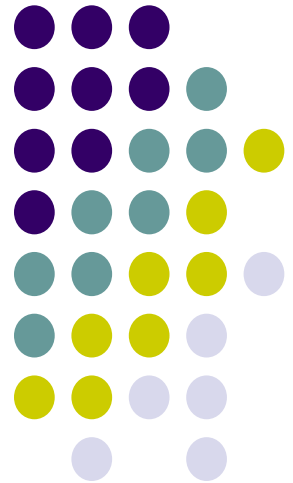


Clasa a IX-a

# Aplicații ale trigonometriei în geometrie



## *Teorema* *cosinusului*



*Prof. Carmen Mirela Alexa*

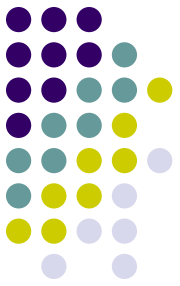


## *Recapitularea cunoștințelor*

- Care este forma analitică a unui vector de poziție?
- Care este lungimea lui?
- Cum se exprimă analitic un vector dat de două puncte oarecare din plan?
- Care este lungimea lui?
- Care este definiția produsului scalar a 2 vectori?
- Cum se scrie analitic produsul scalar?
- Cum se exprimă cosinusul unghiului a doi vectori?
- Care este condiția de ortogonalitate a doi vectori?



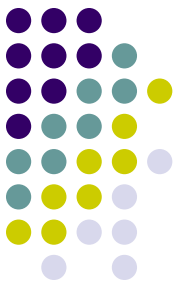
# Problema 1



Să se determine unghiul vectorilor:

a)  $\vec{u} = 2\vec{i} + \vec{j}$ ,  $\vec{v} = -4\vec{i} - 2\vec{j}$ ;

b)  $\vec{u} = -2\vec{i} + \vec{j}$ ,  $\vec{v} = \vec{i} + 2\vec{j}$ .



## Rezolvare problema 1

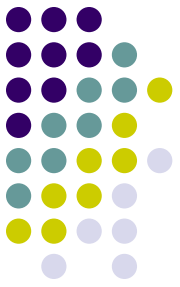
$$\begin{aligned} \text{a) } \vec{u} \cdot \vec{v} &= |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos \varphi = \sqrt{4+1} \cdot \sqrt{16+4} \cdot \cos \varphi = 10 \cos \varphi \\ \vec{u} \cdot \vec{v} &= a_1 a_2 + b_1 b_2 = 2(-4) + 1(-2) = -10. \end{aligned}$$

Atunci

$$-10 \cos \varphi = 10 \Rightarrow \cos \varphi = -1$$

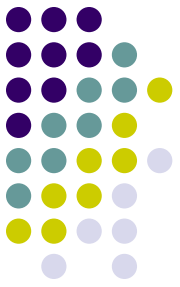
$$\text{Cum } \varphi \in [0, \pi] \Rightarrow \varphi = \pi$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \vec{u} \cdot \vec{v} &= |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos \varphi = \sqrt{5} \cdot \sqrt{5} \cdot \cos \varphi = 1(-2) + 1 \cdot 2 \\ &\Rightarrow \cos \varphi = 0 \\ \text{Cum } \varphi &\in [0, \pi] \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$



## *Problema 2*

Să se determine parametrul real  $m$  știind că  
triunghiul  $ABC$  este dreptunghic în  $\hat{A}$ , iar  
 $A(m-1, -6)$ ,  $B(2, -1-m)$ ,  $C(-12, 0)$ .



## Rezolvare problema 2

$$\Delta ABC \text{ dreptunghic} \Leftrightarrow AB \perp AC \Leftrightarrow \overline{AB} \cdot \overline{AC} = 0$$

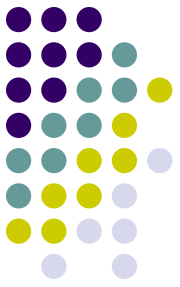
$$\overline{AB} = (3-m, -m+5), \quad \overline{AC} = (-11-m, 6).$$

$$\text{Atunci } (3-m) \cdot (-11-m) + 6(-m+5) = 0$$

$$\Leftrightarrow m^2 + 2m - 3 = 0 \Leftrightarrow m_1 = 1, \quad m_2 = 3.$$



# *Teorema cosinusului*



**Teoremă:** Fie  $ABC$  un triunghi cu  $AB = c$ ,  
 $AC = b$ ,  $BC = a$ . Atunci au loc egalitățile:

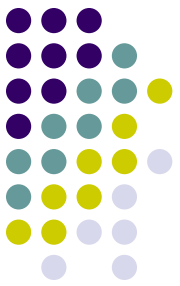
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A;$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B;$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C.$$



# Demonstrație



Rescriem prima relație:

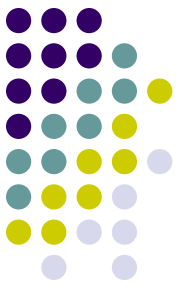
$$BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2AC \cdot AB \cdot \cos A$$

Calculăm membrul drept:

$$\begin{aligned} AC^2 + AB^2 - 2AC \cdot AB \cdot \cos A &= \\ &= |\overrightarrow{AC}|^2 + |\overrightarrow{AB}|^2 - 2|\overrightarrow{AC}| \cdot |\overrightarrow{AB}| \cdot \cos A = \\ &= |\overrightarrow{AC}|^2 + |\overrightarrow{AB}|^2 - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \\ &= \overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{AB}^2 - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})^2 = \\ &= (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA})^2 = \overrightarrow{BC}^2 = |\overrightarrow{BC}|^2 = BC^2. \end{aligned}$$

c.c.t.d.





## Observația 1

Dacă  $\hat{A}=90^\circ \Rightarrow \overline{AB} \cdot \overline{AC} = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow BC^2 = AC^2 + AB^2 \Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2,$$

atunci vom întâlni chiar teorema lui Pitagora.

De aceea, teorema cosinusului este o generalizare a teoremei lui Pitagora valabilă pentru orice triunghi.



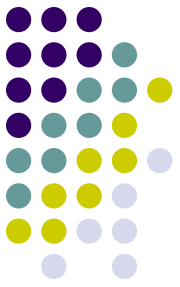
## Observația 2

Din teorema cosinusului se pot determina măsurile unghiurilor triunghiului, în funcție de laturile acestuia:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc};$$

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac};$$

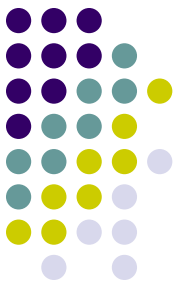
$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$



## Problema 3

Fie  $\triangle ABC$ . Să se arate că:

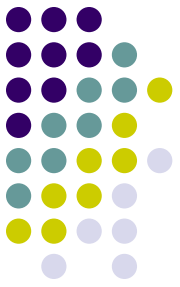
$$\overline{AB} \cdot \overline{AC} + \overline{BA} \cdot \overline{BC} + \overline{CA} \cdot \overline{CB} = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2).$$



## Rezolvare problema 3

$$\begin{aligned} & \overline{AB} \cdot \overline{AC} + \overline{BA} \cdot \overline{BC} + \overline{CA} \cdot \overline{CB} = \\ & = |\overline{AB}| \cdot |\overline{AC}| \cdot \cos A + |\overline{BA}| \cdot |\overline{BC}| \cdot \cos B + |\overline{CA}| \cdot |\overline{CB}| \cdot \cos C \\ & = c \cdot b \cdot \cos A + c \cdot a \cdot \cos B + a \cdot b \cdot \cos C = \\ & = \frac{1}{2}(b^2 + c^2 - a^2) + \frac{1}{2}(a^2 + c^2 - b^2) + \frac{1}{2}(a^2 + b^2 - c^2) = \\ & = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2). \end{aligned}$$

c.c.t.d

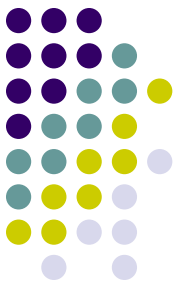


## Problema 4

Un triunghi  $ABC$  are laturile  $a = 10$ ,  $b = 5$ ,  
 $c = \sqrt{50}$ .

a) Să se determine cosinusul unghiurilor  
triunghiului.

b) Să se calculeze  $\cos(B + C)$ .



## Rezolvare problema 4

$$\text{a) } \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{25 + 50 - 100}{2 \cdot 5 \cdot \sqrt{50}} = \frac{-25}{10 \cdot \sqrt{50}} =$$

$$\cos A = -\frac{5\sqrt{50}}{100} = -\frac{5\sqrt{2}}{20} = -\frac{\sqrt{2}}{4}.$$

$$\text{Analog } \cos B = \frac{100 + 50 - 25}{2 \cdot 10 \cdot \sqrt{50}} = \frac{25}{20 \cdot \sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{4}.$$

$$\cos C = \frac{100 + 25 - 50}{2 \cdot 10 \cdot 5} = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}.$$

$$\text{b) } \cos(B+C) = \cos(\pi - A) = -\cos A = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$



## *Tema de casă*



- Din manualul de Niță, Năstăsescu, ..., de la paginile 237 – 238 se va conspecta teorema cosinusului.
- Din culegerea de Burtea se vor rezolva de la pagina 233 exercițiile 2,3,4,5.